Двойные гомологии момент-угол-комплексов и биградуированные персистентные модули

совместно с А. Бари, И. Лимонченко, Дж. Сонгом и Д. Стенли

Т. Е. Панов

МГУ, ВШЭ

Научная конференция
«Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных»
Томский государственный университет
5–9 декабря 2023

Персистентные гомологии и баркоды

$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — неотрицательные вещественные числа (категория ч.у.м. $\leqslant$). Персистентный модуль — это (ковариантный) фуктор

$$\mathcal{M}\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathsf{k}\text{-}\textsc{mod}$$

в категорию векторных пространств над полем k.

Т. е. семейство векторных пространств $\{M_s\}_{s\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}}$ и линейных отображений $\{\varphi_{s_1,s_2}\colon M_{s_1} \to M_{s_2}\}_{s_1\leqslant s_2}$, так что $\varphi_{s,s} = \mathrm{id}\colon M_s \to M_s$ и $\varphi_{s_2,s_3} \circ \varphi_{s_1,s_2} = \varphi_{s_1,s_3}$ при $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3$.

Пример

Пусть $I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — интервал. Определим интервальный модуль

$$\mathrm{k}(I)\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathrm{k}\text{-}\mathrm{MOD}, \quad s \mapsto \mathrm{k}(I)_s := \begin{cases} \mathrm{k}, & \text{если } s \in I; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема (интервальное разложение)

Пусть $\mathcal{M} = \{M_s\}_{s \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}}$ — персистентный модуль, причём все M_s конечномерны. Тогда

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{I \in B(\mathcal{M})} \mathrm{k}(I)$$

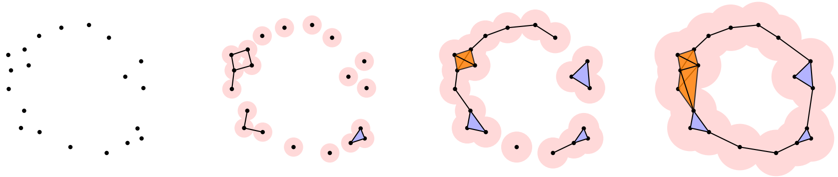
для некоторого набора (мультимножества) $B(\mathcal{M})$ интервалов в $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Набор интервалов $B(\mathcal{M})$ называется баркодом модуля $\mathcal{M}$.

(X, d_X) — конечное псевдометрическое пространство (облако точек).

Фильтрация Виеториса–Рипса $\{R(X,t)\}_{t\geqslant 0}$ состоит из симплициальных комплексов Виеториса–Рипса $R(X,t)$ с параметром близости t.

$R(X,t)$ — кликовый комплекс графа с множеством вершин X, в котором x и y соединены ребром, если $d_X(x,y) \leqslant t$.
$R(X,t_1) \hookrightarrow R(X,t_2)$ (подкомплекс) при $t_1 \leqslant t_2$.



$$X = R(X,0) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R(X,t_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R(X,t_2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R(X,t_3) \hookrightarrow \cdots$$

Рис.: Облако точек и фильтрация Виеториса–Рипса.

Модуль n-мерных персистентных гомологий

$$\mathcal{PH}_n(X)\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \text{k-}\mathrm{MOD}, \quad t \mapsto H_n(R(X,t)),$$

где $H_n(-)$ — n-мерные симплициальные гомологии.
$B(X) = B(\mathcal{PH}(X))$ баркод модуля $\mathcal{PH}(X) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{PH}_n(X)$.

Класс гомологий $\alpha \in \widetilde{H}_n(R(X,t))$

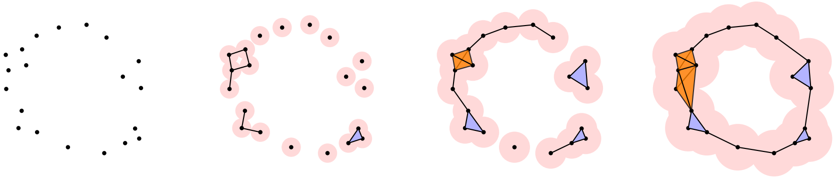
(1) рождается в момент r, если

- (i) $\alpha \in \mathrm{im}\big(\widetilde{H}_n(R(X,r)) \to \widetilde{H}_n(R(X,t))\big)$;
- (ii) $\alpha \notin \mathrm{im}\big(\widetilde{H}_n(R(X,p)) \to \widetilde{H}_n(R(X,t))\big)$ при $p < r$,

(2) умирает в момент s, если

- (i) $\alpha \in \ker\big(\widetilde{H}_n(R(X,t)) \to \widetilde{H}_n(R(X,s))\big)$;
- (ii) $\alpha \notin \ker\big(\widetilde{H}_n(R(X,t)) \to \widetilde{H}_n(R(X,q))\big)$ при $q < s$.

$[r,s)$ называется интервалом персистентности класса α.
Для $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ размерность пространства $\widetilde{H}_n(R(X,t))$ есть число интервалов персистентности, содержащих t.



$$X = R(X,0) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R(X,t_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R(X,t_2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R(X,t_3) \hookrightarrow \cdots$$

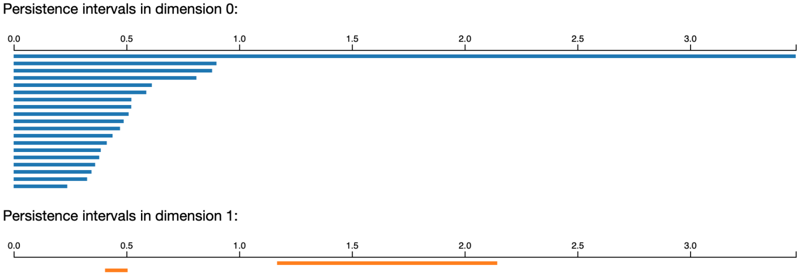


Рис.: Баркод фильтрации Виеториса–Рипса

Изометрия и стабильность

Теорема стабильности утверждает, что баркоды персистентных гомологий устойчивы относительно возмущений данных в метрике Громова–Хаусдорфа. Это ключевой результат, обеспечивающий широкое применение персистентных гомологий в анализе данных.

Теорема (теорема стабильности)

Пусть (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *— конечные псевдометрические пространства, а* $B(X)$ *и* $B(Y)$ *— баркоды персистентных гомологий* $\mathcal{PH}(X)$ *и* $\mathcal{PH}(Y)$. *Тогда*

$$W_\infty(B(X), B(Y)) \leqslant 2\, d_{GH}(X, Y).$$

Хаусдорфово расстояние между подмножествами A и B псевдометрического пространства (Z, d) есть

$$d_H(A, B) := \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a, B),\ \sup_{b\in B} d(A, b)\Big\}.$$

Расстояние Громова–Хаусдорфа между конечными псевдометрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) есть

$$d_{GH}(X, Y) := \inf_{Z,f,g} d_H(f(X), g(Y)),$$

где инфимум берётся по всем изометрическим вложениям $f\colon X \to Z$ в $g\colon Y \to Z$ в некоторое Z. Эквивалентно,

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\min_{C} \max_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in C} |d_X(x_1, x_2) - d_Y(y_1, y_2)|,$$

где минимум берётся по всем соответствиям между X и Y.

Пусть B и B' — конечные мультимножества интервалов вида $[a, b)$.
Положим $\overline{B} = B \cup \varnothing^{|B'|}$
(добавим к B пустой интервал $\varnothing$ кратности $|B'|$.
Аналогично, $\overline{B'} = B' \cup \varnothing^{|B|}$.
Теперь $\overline{B}$ и $\overline{B'}$ одинаковой мощности.

Определим функцию расстояния $\pi\colon \overline{B} \times \overline{B'} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$:

$$\pi\left([a,b),[a',b')\right) = \max\{|a'-a|,|b'-b|\}, \quad \pi([a,\infty),[a',\infty)) = |a'-a|,$$
$$\pi([a,b),\varnothing) = \frac{b-a}{2}, \quad \pi(\varnothing,[a',b')) = \frac{b'-a'}{2}, \quad \pi(\varnothing,\varnothing) = 0,$$
$$\pi([a,\infty),[a',b')) = \pi([a,b),[a',\infty)) = \pi([a,\infty),\varnothing) = \pi(\varnothing,[a',\infty)) = \infty$$

Пусть $\mathcal{D}\left(\overline{B},\overline{B'}\right)$ — множество биекций $\theta\colon \overline{B} \to \overline{B'}$.
∞-расстояние Васерштейна (bottleneck distance) есть

$$W_\infty(B,B') = \min_{\theta\in\mathcal{D}(\overline{B},\overline{B'})} \max_{I\in\overline{B}} \pi(I,\theta(I)).$$

Момент-угол-комплекс

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$
$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}$ — симплекс; всегда $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим m-мерный единичный полидиск:

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leqslant 1 \text{ for } i = 1, ..., m\}.$$

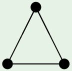
Момент-угол-комплекс

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} \mathbb{D} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{S} \Big) \subset \mathbb{D}^m,$$

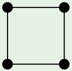
где $\mathbb{S}$ — граница диска $\mathbb{D}$.

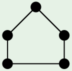
На $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ действует тор T^m.
Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение сферы (например, граница симплициального многогранника), то $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — топологическое многообразие, момент-угол-многообразие.

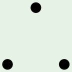
Пример

1. $\mathcal{K} =$  (граница треугольника). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{D} \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D}^3) \cong S^5.$$

2. $\mathcal{K} =$  (граница квадрата). Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3 \times S^3$.

3. $\mathcal{K} =$  Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \underbrace{(S^3 \times S^4) \# \cdots \# (S^3 \times S^4)}_{5}$.

4. $\mathcal{K} =$  (три точки). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}) \simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$$

(не многообразие).

Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера) комплекса $\mathcal{K}$:

$$\mathsf{k}[\mathcal{K}] := \mathsf{k}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ порождён мономами $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, соответствующим *не симплексам* $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}$.

Теорема

Биградуированное кольцо когомологий $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathsf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathsf{k}[\mathcal{K}], \mathsf{k}\big) \\ &\cong H\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathsf{k}[\mathcal{K}], d\big) \\ &\cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I). \end{aligned}$$

Здесь $\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathsf{k}[\mathcal{K}], d\big)$ — *комплекс Косюля с* $\mathrm{bideg}\, u_i = (-1, 2)$, $\mathrm{bideg}\, v_i = (0, 2)$ *и* $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

$\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$ — *приведённые симплициальные когомологии полного подкомплекса* $\mathcal{K}_I \subset \mathcal{K}$ *(ограничения* $\mathcal{K}$ *на* $I \subset [m]$*).*

Биградуированные гомологии и баркоды

Биградуированные компоненты когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ суть

$$H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]\colon |I|=\ell} \widetilde{H}^{\ell-k-1}(\mathcal{K}_I), \quad H^p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{-k+2\ell=p} H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Рассмотрим факторкольцо кольца Косюля $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$:

$$R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}]\big/(v_i^2 = u_iv_i = 0,\ 1\leqslant i\leqslant m).$$

Тогда $R^*(\mathcal{K})$ конечномерно с базисом из мономов u_Jv_I, где $J\subset[m]$, $I\in\mathcal{K}$ и $J\cap I=\varnothing$.

$R^*(\mathcal{K})$ отождествляется к клеточными коцепями $C^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, идеал $(v_i^2 = u_iv_i = 0,\ 1\leqslant i\leqslant m)$ является d-инвариантным и ацикличным, что даёт изоморфизм

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\cong H\big(R^*(\mathcal{K}),d\big).$$

Для гомологий момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I\in K}(\mathbb{D},\mathbb{S})^I \subset \mathbb{D}^m$ имеем

$$H_p(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{-i+2j=p} H_{-i,2j}(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{p-|J|-1}(K_J).$$

Биградуированные числа Бетти комплекса K (с коэффициентами в k):

$$\beta_{-i,2j}(K) := \dim H_{-i,2j}(\mathcal{Z}_K) = \sum_{J\subset[m]:\ |J|=j} \dim \widetilde{H}_{j-i-1}(K_J).$$

При $j=m$ имеем $\beta_{-i,2m}(K) = \dim \widetilde{H}_{m-i-1}(K)$.

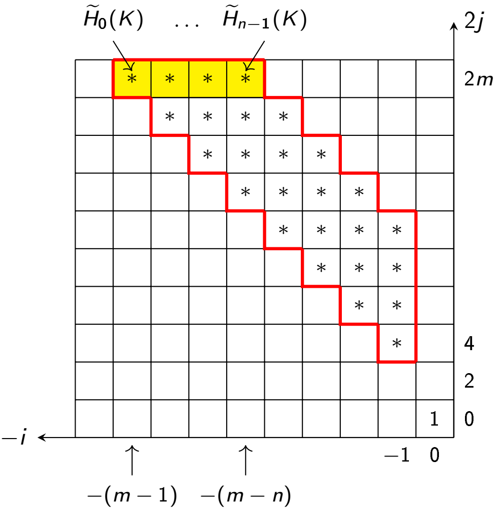


Рис.: Биградуированные числа Бетти $(n-1)$-мерного K с m вершинами.

(X, d_X) — конечное псевдометрическое пространство.
$\{R(X,t)\}_{t\geqslant 0}$ фильтрация Виеториса–Рипса.

Модуль биградуированных персистентных гомологий размерности $(-i, 2j)$ есть

$$\mathcal{PHZ}_{-i,2j}(X)\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbf{k}\text{-}\textsc{mod}, \quad t \mapsto H_{-i,2j}(\mathcal{Z}_{R(X,t)}).$$

Биградуированный баркод $BB(X)$ — набор интервалов персистентности биградуированных гомологий $H_{-i,2j}(\mathcal{Z}_{R(X,t)})$.
Для $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ размерность пространства $H_{-i,2j}(\mathcal{Z}_{R(X,t)})$ равна числу интервалов персистентности, содержащих t.

Биградуированный баркод $BB(X)$ облака точек X — диаграмма в 3-мерном пространстве.
Её верхний этаж — обычный баркод $B(X)$.

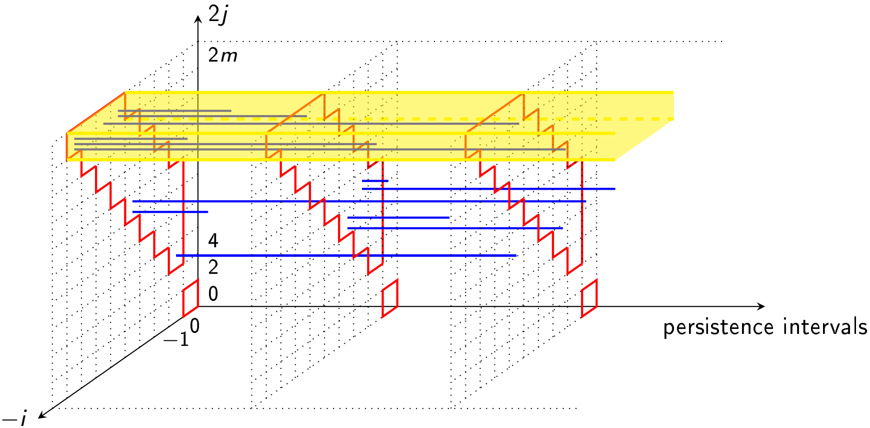


Рис.: Биградуированный баркод.

Пример

$X_1 = \{(0,0),(2,0),(0,4)\}$, $X_2 = \{(0,0),(2,0),(1,\sqrt{15})\}$.
На рис. показаны комплексы Виеториса–Рипса при $t = 0, 2, 4, 2\sqrt{5}$.

Эти облака точек не различаются обычными персистентными баркодами, но различаются биградуированными баркодами.

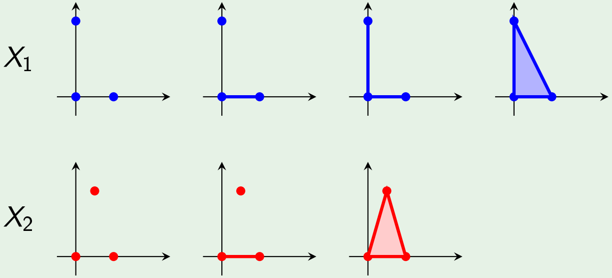
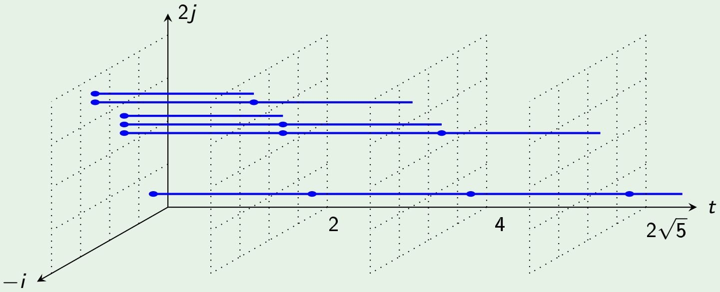
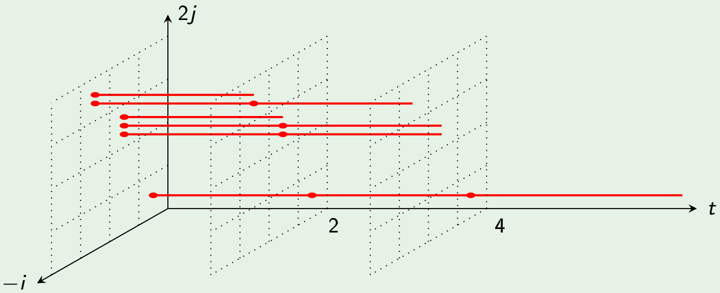


Рис.: Две последовательности комплексов Виеториса–Рипса.

Пример





Двойные (вторичные) гомологии

Имеем

$$H_p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I),$$

Для $j \in [m] \setminus I$ рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi_{p;I,j} \colon \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_{I\cup\{j\}}),$$

индуцированный вложением $\mathcal{K}_I \hookrightarrow \mathcal{K}_{I\cup\{j\}}$.Положим

$$\partial'_p = (-1)^{p+1} \bigoplus_{I\subset[m],\, j\in[m]\setminus I} \varepsilon(j, I)\,\varphi_{p;I,j},$$

где

$$\varepsilon(j, I) = (-1)^{\#\{i\in I\colon\, i<j\}}.$$

Лемма

$\partial'_p \colon \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I) \to \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I)$ *удовлетворяет* $(\partial'_p)^2 = 0$.

Получаем цепной комплекс

$$CH_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) := (H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \partial'),$$

где

$$\partial' \colon \widetilde{H}_{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to \widetilde{H}_{-k-1,2\ell+2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$$

по отношению к биградуированному разложению

$$H_p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{-k+2\ell=p} H_{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \quad H_{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]\colon |I|=\ell} \widetilde{H}_{\ell-k-1}(\mathcal{K}_I).$$

Двойные (вторичные) гомологии

$$HH_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \partial').$$

В когомологической версии, для $i \in I$ имеем гомоморфизм

$$\psi_{p;i,I}\colon \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}}),$$

индуцированный вложением $\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}} \hookrightarrow \mathcal{K}_I$, и

$$d'_p = (-1)^{p+1}\sum_{i\in I}\varepsilon(i,I)\psi_{p;i,I}.$$

Определим $d'\colon H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ на $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{I\subset[m]}\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$:

$$d'\colon H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^{-k+1,2\ell-2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Имеем $(d')^2 = 0$ и коцепной комплекс

$$CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) := (H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d').$$

Биградуированные когомологии

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H\big(H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d'\big).$$

Бикомплексы

В комплексе Косюля $\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}]$ дифференциал d бистепени $(1, 0)$ задаётся как

$$du_j = v_j, \quad dv_j = 0, \qquad \text{при } j = 1, \ldots, m.$$

Введём второй дифференциал d' бистепени $(1, -2)$ на $\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, положив

$$d' u_j = 1, \quad d' v_j = 0, \qquad \text{при } j = 1, \ldots, m,$$

и продолжив по правилу Лейбница. В явном виде

$$d'(u_J v_I) = \sum_{j \in J} \varepsilon(j, J) u_{J \setminus \{j\}} v_I, \quad d'(v_I) = 0.$$

Дифференциал d' также определён на конечномерном подпространстве $R^*(\mathcal{K}) \subset \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}]$, порождённом мономами $u_J v_I$ с $J \cap I = \varnothing$.

Лемма

$\left(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\right)$, $\left(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}], d, d'\right)$ и $\left(R^*(\mathcal{K}), d, d'\right)$ являются бикомплексами, т. е. $dd' = -d'd$.

По определению, $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть первые двойные когомологии бикомплекса $\left(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\right)$:

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H\Big(H\big(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d\big), d'\Big).$$

Теорема

Бикомплексы $\left(\bigoplus_{I\subset[m]} C^*(\mathcal{K}_I), d, d'\right)$ и $\left(R^*(\mathcal{K}), d, d'\right)$ изоморфны. Следовательно, $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ изоморфно вторым двойным когомологиям бикомплекса $\left(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}], d, d'\right)$:

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H\Big(H\big(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}], d\big), d'\Big).$$

Следствие

Двойные когомологии $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ *являются градуированно-коммутативной алгеброй, с умножением индуцированным из когомологического умножения в* $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Связь с действием тора

$S^1 \times X \to X$ — действие окружности на X. Имеем

$$H^*(X) \to H^*(S^1 \times X) = \Lambda[u] \otimes H^*(X), \quad \alpha \mapsto 1 \otimes \alpha + u \otimes \iota(\alpha),$$

где $\iota\colon H^*(X) \to H^{*-1}(X)$ — дифференцирование

Предложение

Дифференцирование, соответствующее действию i-й координатной окружности $S^1_i \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, индуцировано дифференцированием ι_i комплекса Косюля $(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, заданным на образующих по формуле

$$\iota_i(u_j) = \delta_{ij}, \quad \iota_i(v_j) = 0, \qquad \textit{for } j = 1, \ldots, m,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Дифференцирование, соответствующее диагональному действию $S^1_d \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, есть дифференциал d'.

Три определения $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$

Биградуированные когомологии $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ определяются как

- когомологии коцепного комплекса

$$CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) := (H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d'),$$

  где d' определён на $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$ путём взятия знакопеременной суммы гомоморфизмов $H^p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}})$, индуцированных вложениями $\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}} \hookrightarrow \mathcal{K}_I$;

- первые двойные когомологии бикомплекса

$$\Big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathrm{k}[\mathcal{K}], d, d'\Big)$$

  with $du_j = v_j$, $dv_j = 0$, $d'u_j = 1$, $d'v_j = 0$.

- когомологии по отношению к дифференцированию на $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, возникающему из диагонального действия тора $S^1_d \times \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

m-циклы и двойственность Пуанкаре

Пусть $\mathcal{Z}_\mathcal{L}$ — момент-угол-комплекс, соответствующий m-циклу $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{L}$ гомеоморфно связной сумме произведений сфер:

$$\mathcal{Z}_\mathcal{L} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{m-1} \left(S^k \times S^{m+2-k}\right)^{\#(k-2)\binom{m-2}{k-1}}.$$

Теорема

Пусть $\mathcal{L}$ есть m-цикл, $m \geqslant 5$. Тогда $HH^{-p,2q}(\mathcal{Z}_\mathcal{L})$ есть k *в размерностях $(-p, 2q) = (0,0)$, $(-1,4)$, $(-m+3, 2(m-2))$, $(-m+2, 2m)$ и 0 в остальных случаях.*

Пример

При $m = 5$ вектор чисел Бетти для $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть (10055001), а для $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть (10011001).

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — гомологическая сфера размерности $n-1$. Тогда двойные когомологии $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ являются алгеброй с двойственностью Пуанкаре. В частности,

$$\dim HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \dim HH^{-(m-n)+k,2(m-\ell)}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Обратное неверно, в отличие от обычных когомологий $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Например, если $\mathcal{K}$ есть набор из m отдельных точек, то $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является алгеброй Пуанкаре, но $\mathcal{K}$ не является гомологической сферой при $m > 2$.

Вопрос

Описать класс симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является алгеброй Пуанкаре.

Пусть X — псевдометрическое пространство (облако точек). Модуль биградуированных персистентных двойных гомологий размерности $(-i, 2j)$ есть

$$\mathcal{PHHZ}_{-i,2j}(X)\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathrm{k}\text{-}\textsc{mod}, \quad t \mapsto HH_{-i,2j}(\mathcal{Z}_{R(X,t)}).$$

Биграуированные персистентные гомологии — функтор в категорию дифференциальных градуированных k-векторных пространств:

$$\mathcal{PHZ}(X)\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \textsc{dg}(\mathrm{k}\text{-}\textsc{mod}), \quad t \mapsto (H_{*,*}(\mathcal{Z}_{R(X,t)}), \partial').$$

Тогда

$$\mathcal{PHHZ}(X) = \mathcal{H} \circ \mathcal{PHZ}(X),$$

где $\mathcal{H}\colon \textsc{dg}(\mathrm{k}\text{-}\textsc{mod}) \to \mathrm{k}\text{-}\textsc{mod}$ — функтор гомологий. Это удобно для сравнения расстояний перемежения (interleaving distances).

$\mathbb{BB}(X)$: двойной баркод, соответствующий биградуированному персистентному модулю $\mathcal{PHHZ}(X)$.

Биградуированные персистентные гомологии не обладают свойством стабильности, а биградуированные *двойные* гомологии им обладают:

Теорема (Бари–Лимонченко-Панов-Сонг-Стенли)

Пусть $\mathbb{BB}(X)$ и $\mathbb{BB}(Y)$ биградуированные баркоды персистентных модулей $\mathcal{PHHZ}(X)$ и $\mathcal{PHHZ}(Y)$. Тогда

$$W_\infty(\mathbb{BB}(X), \mathbb{BB}(Y)) \leqslant 2d_{GH}(X, Y).$$

Ссылки

[1] Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song and Donald Stanley. *Double cohomology of moment-angle complexes.* Advances in Math. 432 (2023), Paper no. 109274, 34 pp.

[2] Anthony Bahri, Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song and Donald Stanley. *A stability theorem for bigraded persistence barcodes.* Preprint (2023); arXiv:2303.14694.