ПРЕДСКАЗАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

В.А. Громов

stroller@rambler.ru

УДК 519.6, 539.3

Рассматриваются прямые и обратные задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана: под прямой задачей теории бифуркаций понимается задача построения бифуркационной картины, под обратной – задача идентификации предбифуркационного состояния, т.е. задача предсказания потери устойчивости. Представлены алгоритмы решения как прямой, так и обратной задачи; причём алгоритм решения обратной задачи существенно опирается на алгоритм решения прямой. Представлены результаты для цилиндрической оболочки, подвергнутой действию внешнего давления, и цилиндрической оболочки при действии осевого сжатия.

Ключевые слова: прямые и обратные задачи теории бифуркаций, уравнения Кармана, итерационный обобщённый метод Канторовича, цилиндрическая оболочка

Prediction of buckling for cylindrical shell: the direct and inverse bifurcation problems of the von Karman equations

The paper deals with the direct and inverse bifurcation problems for the von Karman equations; the direct bifurcation problem implies that a bifurcation (branching) structure of the equations is constructed, while the inverse bifurcation problem is the problem to identify pre-bifurcation states that is to predict buckling. The paper considers the algorithms to solve both direct and inverse problems; the algorithm for the inverse problem employs the one used to solve the direct problem. The results for cylindrical shell subject to external pressure and that one under axial compression are discussed.

Keywords: the direct and inverse bifurcation problems, for the von Karman equations, the iterative generalized Kantorovich method, cylindrical shell

Модели систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями типа Кармана, находят широкое применение в аэрокосмической технике, био- и нанотехнологиях, кораблестроении, нефтегазовой промышленности. Современная парадигма создания систем, характеризующихся свойством робастности, требует учёта возможности изменения состояния системы (без утраты её функциональных свойств) в условиях непредвиденных воздействий, что обуславливает необходимость создания нелинейных моделей и анализа связанного с ними явления бифуркации [4, 8, 9]. Для решения задачи предсказания потери устойчивости цилиндрической оболочки – задачи идентификации предбифуркационного состояния – как обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана [4] предлагается использовать

Громов Василий Александрович, д.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики” (Москва, Россия); Vasilii A. Gromov, DSc, associate professor, (National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia)

характерные последовательности решений, предшествующих возможным бифуркациям системы, (такой тип предвестников бифуркации относится к классу топологических). Для отыскания указанных последовательностей применялась экстракция знаний из информации о последовательностях решений, фиксирующихся на постбифуркационных (закритических) ветвях. Данный подход обуславливает необходимость построения последовательности решений (в функции от параметра нагрузки) для всех постбиркационных ветвей решения – построение бифуркационной картины; указанная задача формализуется как прямая задача теории бифуркаций [2-4,6-9]. Анализ основных особенностей, возникающих в процессе исследования систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями типа Кармана, таких как наличие решений соответствующих нелинейных краевых задач, которым свойственна существенная изменяемость в обоих координатных направлениях, вместе с возможностью существования постбифуркационных ветвей вторичного, третичного и дальнейшего предполагает создание метода анализа нелинейных краевых задач в частных производных, позволяющего преодолевать указанные трудности. Здесь предлагается итерационный метод построения решений нелинейных краевых задач, аналогичный обобщённому методу Канторовича решения линейных систем. В рамках предложенного метода решение на итерациях алгоритма представляется в виде суммы произведений функций одной переменной, что позволяет свести решение нелинейной краевой задачи для уравнений в частных производных к решению последовательности нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Это, в свою очередь, позволило использовать аппарат анализа и решения уравнений указанного класса: метод сведения нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений к эквивалентной задаче Коши, метод продолжения по параметру и др. Применение указанного подхода приводит к вычислительным процедурам, количество операций в которых определяется размерностью решаемой задачи (а не размерностью дискретизации) и скоростью сходимости метода сведения к эквивалентной задаче Коши. С использованием предложенного подхода и разработанных алгоритмов был проведено широкомасштабное численное исследование общих свойств нелинейных моделей, описываемых уравнениями Кармана, и качественной картины их ветвления. Здесь было установлено, во-первых, что зависимости вида “бифуркационные значения амплитуды правой части в функции от параметра задачи” (сечения бифуркационного множества) носят существенно немонотонный характер. Во-вторых, реализующийся тип постбифуркационного решения определяется, главным образом, его изменяемостью вдоль главных координатных направлений, а не видом функции правой части. В-третьих, для нелинейных краевых задач для уравнений указанного класса характерно существование ветвей первичного, вторичного и третичного ветвления; особые точки могут характеризоваться одно- и двукратным вырождением. В-четвёртых, установлено, что среди множества структур решения, отвечающим различным возможным значениям параметров задачи, можно выделить базовую бифуркационную структуру. При остальных значениях параметров происходит разрушение базовой бифуркационной структуры с образованием предельных кривых и изолированных ветвей решения. При этом возникающие предельные кривые как бы “притягиваются” к одной из постбифуркационных ветвей базового случая. Проведенный анализ позволил дать теоретическое объяснение вышеуказанной немонотонности кривых-сечений бифуркационного множества, связав минимумы и максимумы данных зависимостей с различными постбифуркационными ветвями базовой бифуркационной структуры. Для случая замкнутой цилиндрической области определения и однородных граничных условий (цилиндрическая оболочка при действии внешнего давления) базовой является бифуркационная картина, отвечающая константной функции правой части: решение характеризуется добифуркационной ветвью и ветвями первичного и вторичного ветвления. Ветвям первичного ветвления отвечают решения, регулярные в окружном направлении, ветвям вторичного ветвления – решения, локализованные в указанном направлении. Особые точки здесь характеризуются однократной вырожденностью [1,5,8]. Для случая замкнутой цилиндрической области определения и неоднородных граничных условий (цилиндрическая оболочка при действии осевого сжатия) базовой является бифуркационная картина, отвечающая константной функции граничных условий и нулевой функции правой части. Структура ветвления нелинейной краевой задачи в данном случае характеризуется следующими типами ветвей: добифуркационная ветвь; ветви первичного ветвления (соответствующие им решения регулярны в обоих направлениях); ветви вторичного ветвления (которым отвечают решения, регулярные в окружном направлении и локализованные в продольном); ветви третичного ветвления (которым отвечают решения, локализованные в обоих направлениях). Здесь возможно существование особых точек, характеризующихся как однократной, так и двукратной вырожденностью [8].

Литература

1.*Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации — М.: Наука, 1988.

2. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Неосесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // ПММ, **67**:6 (2003), 921-932.

3. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов // ПММ, **66**:4 (2002), 621-633.

4. *Obodan N.I., Adlucky V.J., Gromov V.A.* Prediction and Control of Buckling: The Inverse Bifurcation Problems for von Karman Equations // Dutta H., Peters J.F. (Eds.) Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications Studies in Systems, Decision and Control. — N.-Y.: Springer, 2019. — 353-381.

5. *Obodan N.I., Gromov V.A.* Numerical analysis of the branching of solutions to nonlinear equations for cylindrical shells // Int. Appl. Mech., **42**:1 (2006), 90-97.

6.*Obodan N.I., Gromov V.A.* Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure // J. of Engrg. Math., **78**:1 (2013), 239-248.

7. *Obodan N.I., Gromov V.A.* The Complete Bifurcation Structure of Nonlinear Boundary Problem for Cylindrical Panel Subjected to Uniform External Pressure // Thin-walled Struct., **107** (2016), 612-619.

8. *Obodan N.I., Lebedeyev O.G., Gromov V.A.* Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells. — N.-Y.: Springer, 2013.

9. *Zhou Y., Stanciulescu I., Eason T., Spottswood M.* Сопряженные операторы обобщенного сдвига // Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels. Finite Elements in Analysis and Design, **96** (2015), 41-50.